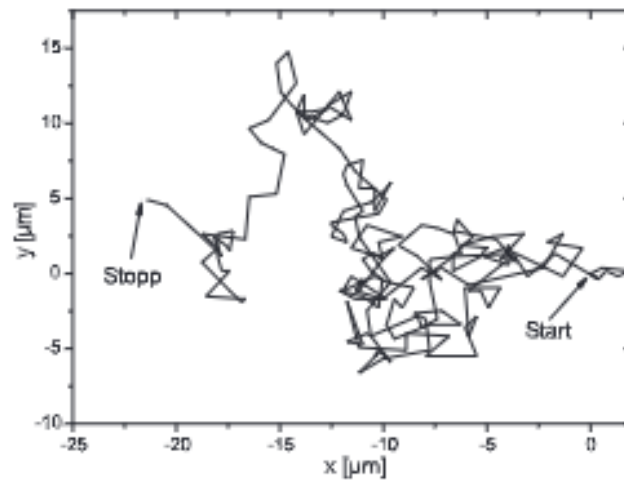


Versuch 223 - Brownsche Bewegung

PAP 2.1, [1]

04.11.2024



[2]

Teilnehmender Student: **Jonathan Rodemers**

Gruppe des Teilnehmenden: 4

Kurs: Montags

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Messverfahren	1
1.3	Grundlagen aus der Physik	1
1.3.1	Einstein-Smoluchowski-Gleichung	1
1.3.2	Stokes-Einstein	2
2	Durchführung	3
2.1	Messprotokoll	3
3	Auswertung	4
3.1	Darstellung der Bewegung	4
3.2	Verschiebungsquadrat	4
3.3	Gausverteilung	5
3.4	Kummulative Verschiebung	6
4	Zusammenfassung und Diskussion	7
5	Anhang	9
	Quellen- und Literaturverzeichnis	11

1. Einleitung

1.1 Motivation

Das Ziel dieses Experiments ist die Erforschung und quantitative Analyse der Brownschen Bewegung, die einen überzeugenden Beweis für die atomare Natur der Materie gebracht hat. Mit diesem Experiment wollen wir die statistischen Eigenschaften der Brownschen Bewegung für kleine Teilchen im Wasser messen und aus diesen Messungen die Boltzmann-Konstante berechnen, die makroskopische thermische Eigenschaften mit mikroskopischem molekularem Verhalten verknüpft.

1.2 Messverfahren

Bei dem Experiment wird ein Mikroskop mit einer Kamera verwendet, um die Bewegung von kleinen, in Wasser suspendierten Latexpartikeln zu erfassen. Die wichtigsten Materialien sind:

- Mikroskop mit Kamera: Nimmt vergrößerte Bilder der Partikelbewegung auf.
- Kalibrierungsskala: Verwendet ein Objektmikrometer, um den Maßstab des Mikroskops in nm/Pixel zu bestimmen.
- Messsoftware (Python): Die Software zeichnet die Partikelpositionen aus den Bildern auf und berechnet dann die Verschiebungswerte.

Das Verfahren beginnt mit der Vorbereitung einer Partikelsuspensionsprobe auf einem Objektträger. Die Bilder werden in bestimmten Intervallen aufgenommen, um die Partikelbewegungen im Laufe der Zeit zu erfassen. Durch Messung der Positionsänderungen der Partikel über die Bilder hinweg kann die mittlere quadratische Verschiebung berechnet werden, was die Bestimmung des Diffusionskoeffizienten und anschließend der Boltzmann-Konstante ermöglicht.

1.3 Grundlagen aus der Physik

Das Experiment basiert auf der Physik der Brownschen Bewegung, die als zufällige, thermisch bedingte Bewegung mikroskopischer Teilchen in einer Flüssigkeit verstanden werden kann. Dieses Phänomen entsteht durch unzählige Zusammenstöße mit Flüssigkeitsmolekülen, die sich ihrerseits aufgrund von Wärmeenergie zufällig bewegen.

1.3.1 Einstein-Smoluchowski-Gleichung

Um die Brownsche Bewegung quantitativ zu beschreiben, führten Einstein und zeitgleich Smoluchowski ein Modell ein, das die mittlere quadratische Verschiebung von Teilchen mit dem Diffusionskoeffizienten D und der Zeit t verknüpft:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt \quad (1.1)$$

und in 2 Dimensionen erweitert sich dies zu:

$$\langle r^2 \rangle = 4Dt \quad (1.2)$$

wobei $\langle r^2 \rangle$ die mittlere quadratische Verschiebung des Partikels von seiner ursprünglichen Position über die Zeit t darstellt. Der Diffusionskoeffizient D gibt an, wie leicht sich die Partikel in der Flüssigkeit ausbreiten und hängt von Faktoren wie der Temperatur und Viskosität der Flüssigkeit sowie der Partikelgröße ab.

1.3.2 Stokes-Einstein

Einstein entwickelte außerdem eine Beziehung zwischen dem Diffusionskoeffizienten D und der Boltzmann-Konstante k , die durch die Stokes-Einstein-Gleichung gegeben ist:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a} \quad (1.3)$$

wobei:

- T die absolute Temperatur der Flüssigkeit ist,
- η die dynamische Viskosität des Fluids ist,
- a der Radius der kugelförmigen Teilchen ist, und
- k die Boltzmann-Konstante.

Diese Gleichung stellt eine entscheidende Verbindung zwischen makroskopischen Größen (wie Viskosität und Temperatur der Flüssigkeit) und mikroskopischen Eigenschaften (wie der durchschnittlichen kinetischen Energie der Moleküle) her. Die Boltzmann-Konstante k fungiert als Brücke zwischen diesen Größen und verbindet die Temperatur mit der durchschnittlichen Energie der Moleküle in der Flüssigkeit. Durch Umstellen der Stokes-Einstein-Gleichung können wir k lösen, für eine kugelförmiges Partikel in 2-Dimensionen

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \cdot \langle r^2 \rangle \quad (1.4)$$

2. Durchführung

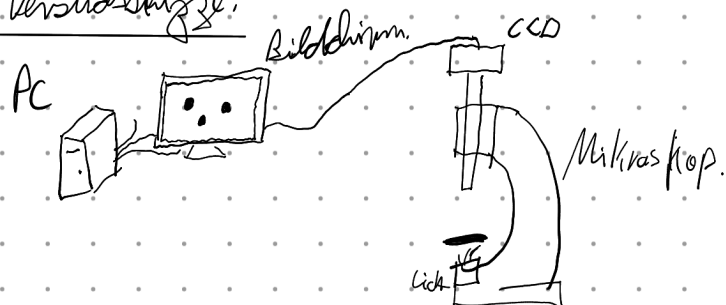
2.1 Messprotokoll

04.11.23 Messprotokoll 223 Jonathan Pakunis
Mannel Sorgenfrei

Geräte:

- Durchlichtmikroskop Motic B1 mit CCD Kamera.
- kugelförmige Partikel suspendiert in Wasser
- PC mit Messprogramm, Jupyter Notebook und
- Thermometer,
- Lichtmikrometer

Versuchsskizze:



Daten:

Partikelgröße: Durchmesser: $(755 \pm 30) \text{ nm}$ ← angegeben

Raumtemperatur: $22,3 \pm 0,1$ °C ← Skalenteile

Fokussierung: $(0,09662) \frac{\text{mm}}{\text{px}}$

Badhaer

3. Auswertung

3.1 Darstellung der Bewegung

Nachdem wir 150 Bilder aufgenommen und mit dem Python Programm ausgewertet haben, erhalten wir eine .txt Datei, welche die verschiedenen x und y Positionen des beobachteten Partikels als Funktion der Bildnummer, und damit auch als Funktion der Zeit angibt (Da jeweils ein Bild in einem festen Zeitintervall aufgenommen wurde). Diese Daten können wir Raumkurve plotten und erhalten dafür folgende Bewegung:

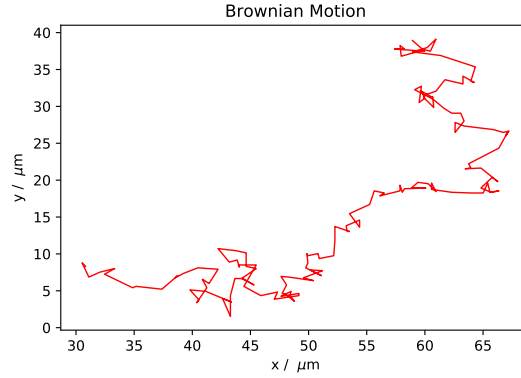


Abbildung 3.1: Brown'sche Bewegung des beobachteten Partikels

3.2 Verschiebungsquadrat

In der txt Datei, als auch in der Raumkurve sind absolute Positionen angegeben, wir interessieren uns aber für den Weg, also die Verschiebung zwischen den einzelnen Bildpunkten und dessen Quadrat.

Dazu berechnen wir die Änderung in x und in y Richtung:

$$dx_i = x_{i-1} - x_i \quad (3.1)$$

Wobei x_{i-1} die x-Koordinate zum Zeitpunkt i-1 ist und x_i zum nächsten Zeitpunkt. Also gerade die Änderung von Bild zu Bild. Gleiches passiert bei der y-Koordinate.

Hieraus berechnen wir die gesamte Verschiebung und quadrieren diese, es ergibt sich also:

$$r = dx^2 + dy^2 \quad (3.2)$$

Dabei ist r das Verschiebungsquadrat. Da wir nun 150 Werte für das Verschiebungsquadrat haben bilden wir den Mittelwert und den mittleren Fehler des Mittelwerts. Aus dem Python-skript, welches sich im Anhang befindet errechnen sich die Werte für unsere Daten wie folgt:

$$r_{\text{Durchschnitt}} = (2.19 \pm 0.17) \mu m$$

Aus der Gleichung 1.4 können wir die Fehlerformel errechnen, die sich ergibt als:

$$\Delta k = \sqrt{\left(\frac{3\pi a r}{2T} \Delta \eta\right)^2 + \left(\frac{3\pi \eta r}{2T} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{-3\pi a \eta r}{2T^2} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{3\pi a \eta}{2T} \Delta r\right)^2} \quad (3.3)$$

Somit erhalten wir für die Boltzmannkonstante:

$$k = (1,19 \pm 0,11) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Weiternoch können wir mithilfe der Formel 1.2 den Diffusionskoeffizienten errechnen, indem wir nach D umstellen. Wir müssen also den Wert für $\langle r^2 \rangle$ und seinen Fehler durch 4 teilen. Es ergibt sich:

$$D = (5,3 \pm 0,4) \cdot 10^{-13} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

3.3 Gausverteilung

Die Verschiebungen dx und dy lassen sich auch als Histogramm darstellen. Die dabei errechneten Gausschen Parameter sind:

$$\mu = -0.2 \mu\text{m}, \quad \sigma = 1.03 \mu\text{m}$$

Dabei ist μ der Mittelwert, bzw. Erwartungswert und σ die Standardabweichung. Man erhält:

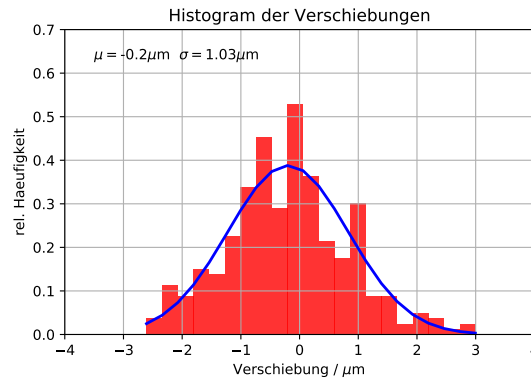


Abbildung 3.2: Verteilung der Verschiebungen

3.4 Kummulative Verschiebung

Nach der Einstein-Smoluchowski-Gleichung ergibt sich für das Verschiebungsquadrat ein linearer Zusammenhang mit der Zeit. Dabei ist die Steigung dann $4D$, wobei D die Diffusionskonstante ist. Wenn wir die Werte als Funktion der Zeit plotten erhalten wir:

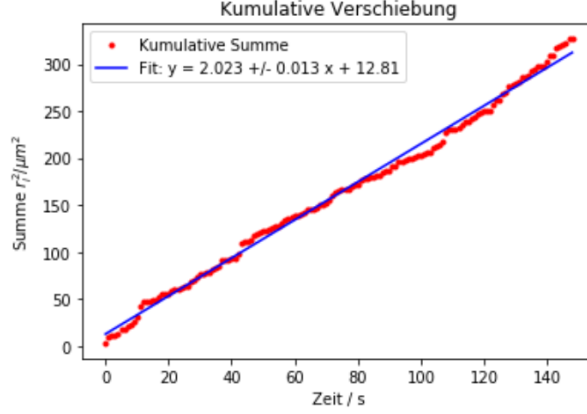


Abbildung 3.3: Kummulative Verschiebungen

Stellt man die Formel 1.3 nach κ um, kann man mit der Diffusionskonstante die Boltzmannkonstante errechnen. Die Diffusionskonstante erhält man über:

$$D = \frac{m}{4} \quad (3.4)$$

Wobei m die Steigung der gefitteten Funktion ist.

Dabei ergibt sich eine Fehlerformel von:

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{6\pi a\eta}{T}\Delta D\right)^2 + \left(\frac{6\pi Da}{T}\Delta\eta\right)^2 + \left(\frac{6\pi D\eta}{T}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{-6\pi Da\eta}{T^2}\Delta T\right)^2} \quad (3.5)$$

und

$$\Delta D = \frac{\Delta m}{4} \quad (3.6)$$

Hieraus ergibt sich:

$$\kappa = (1.15 \pm 0.13) \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}, \quad D = (5.1 \pm 0.3) \cdot 10^{-13} \frac{m^2}{s}$$

4. Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Experiment untersuchten wir eine Brownsche Bewegung in einer Suspension von (wahrscheinlich) Latexpartikeln in Wasser, um die Boltzmann-Konstante zu bestimmen.



Abbildung 4.1: Welche Partikel sind nun drin?

Durch die Aufnahme von aufeinanderfolgenden Bildern der Position eines einzelnen Partikels unter einem Mikroskop konnten wir die mittlere quadratische Verschiebung $\langle r^2 \rangle$ errechnen, die es uns ermöglichte, den Diffusionskoeffizienten D und anschließend die Boltzmann-Konstante k mithilfe der Stokes-Einstein-Beziehung zu bestimmen.

Die Berechnungen ergaben eine Boltzmann-Konstante von

$$\kappa = (1,19 \pm 0,11) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

unter Verwendung des Ansatzes der mittleren quadratischen Verschiebung und

$$\kappa = (1,15 \pm 0,13) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

unter Verwendung der Steigung der linearen kumulativen Verschiebungsfunktion. Diese Werte für κ weichen etwas von dem Literaturwert Wert der Boltzmann-Konstante, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ [3], ab und zwar von $1,73 \sigma$ bzw. $1,77 \sigma$. Dies ist zwar eine merkliche Abweichung, liegt aber angesichts der experimentellen Gegebenheiten noch im Rahmen des Erwarteten.

Die Mikroskoplampe erzeugt Wärme, die lokale thermische Strömungen in der Wasserprobe hervorrufen kann, vor allem, wenn diese noch nicht vollständig das thermische Gleichgewicht erreicht hat. Diese Strömungen können die Bewegung des Partikels beeinflussen und zu einer Richtungsdrift führen, die die Messungen der Verschiebung von der rein zufälligen Brownschen Bewegung ablenkt. Trotzdem, dass unsere Bewegung, wie sie in 3.1 gezeigt ist, einen Drift aufweist erhalten wir erstaunlich gute Werte für die Boltzmannkonstante.

Fehler bei der Kalibrierung des Mikroskops, z. B. die mit dem Objektmikrometer ermittelte nm/Pixel-Skala, könnten ebenfalls zu Ungenauigkeiten geführt haben, insbesondere wenn der Kalibrierungsfaktor über die Zeit hinweg leicht variierte. Geringfügige Fehlausrichtungen oder Vibrationen im Mikroskopaufbau könnten die Messungen ebenfalls verzerrt haben.

Außerdem können sich bei der Verfolgung der Partikelpositionen Bild für Bild leichte Fehler bei der Positionierung ansammeln, insbesondere wenn die Position des Partikels nicht in jedem Bild

perfekt aufgelöst wurde. Dies könnte zu einer Unter- oder Überschätzung der Verschiebungswerte führen und sich auf die abgeleitete mittlere quadratische Verschiebung auswirken.

5. Anhang

```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
import numpy as np
%matplotlib inline
data=np.genfromtxt(' ./ data/position_data.txt ', delimiter=',')
t=data[:,0] #Zeit
x=data[:,1] #x
y=data[:,2] #y

#Partikelbewegung zeichnen und Diagramm speichern
plt.plot(x, y, color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('x / '+'  $\mu$ '+'m')
plt.ylabel('y / '+'  $\mu$ '+'m')
plt.title('Brownian Motion')
plt.savefig('figures/brown1.pdf', format='PDF')

#Berechnung der Differenzen dt, dx, dy
dt=np.array([])
dx=np.array([])
dy=np.array([])

for i in range(len(t)-1):
    dt=np.append( dt,t[i+1]-t[i])
    dx=np.append( dx,x[i+1]-x[i])
    dy=np.append( dy,y[i+1]-y[i])

#Berechnung des Verschiebungsquadrat
r_squared=dx**2+dy**2

#Mittelwert:
r_squared_mean=np.mean(r_squared)
print("r_squared (in Picometer)= ",r_squared_mean)
#Fehler des Mittelwerts:
r_squared_mean_std=np.std(r_squared)/np.sqrt(len(r_squared))
print("r_squared_mean_std= ",r_squared_mean_std)

#Histogramm zeichnen
n, bins, patches=plt.hist(np.append(dx,dy), 21, normed=1,
-facecolor='red', alpha=0.8)
```

```

plt.text(-3.5, .63, '$\mu$=' +
+str(round(np.mean(np.append(dx,dy)),2))+'$\mu$'+'
$\sigma$=' +str(round(np.std(np.append(dx,dy)),2))+'$\mu$')
plt.xlabel('Verschiebung / $\mu$')
plt.ylabel('rel. Haeufigkeit')
plt.title('Histogram der Verschiebungen')
plt.grid(True)
plt.axis([-4, 4, 0, 0.7])

#Gausskurve mit einzeichnen
gauss = mlab.normpdf( bins, np.mean(np.append(dx,dy)), np.std(np.append(dx,dy)))
#plt.plot(bins, gauss, 'b-', linewidth=2)
print('$\mu$=' +str(round(np.mean(np.append(dx,dy)),2))+'$\mu$'+'
$\sigma$=' +str(round(np.std(np.append(dx,dy)),2))+'$\mu$')

plt.savefig('figures/brown2.pdf', format='PDF')

r_kumm = np.cumsum(r_squared)

params, cov = np.polyfit(t[:-1], r_kumm, 1, cov=True)
slope, intercept = params
slope_err, intercept_err = np.sqrt(np.diag(cov))
# Fehler als Wurzel der Diagonalelemente

fit_line = np.polyval(params, t[:-1])

plt.plot(t[:-1], r_kumm, marker='.', color='red', linewidth=0,
-label='Kumulative Summe')
plt.plot(t[:-1], fit_line, color='blue',
label=f'Fit: y = {slope:.3f} +/- {round(slope_err,3)} x
+ {intercept:.2f}')

plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Summe $r_i^2$ / $\mu m^2$')
plt.title('Kumulative Verschiebung')
plt.legend()

plt.show()
plt.savefig('figures/brown3.pdf', format='PDF')

```

Quellen- und Literaturverzeichnis

- [1] CAPTAIN JONI: *pap1-tex-vorlage*. <https://github.com/captain-joni/pap1-tex-vorlage>. – [Online; Stand 28.08.2024]
- [2] DR. J. WAGNER: *Physikalisches Praktikum 1 für Studierende der Physik B.Sc.* <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona/PAP1.pdf>. – [Online; Stand 01/2014]
- [3] WIKIPEDIA: *Bolzmannkonstante*. https://no.wikipedia.org/wiki/Boltzmanns_konstant. – [Online; Stand 8.11.2024]